第二章、随机变量与概率分布

§2.1 随机变量

- 一些事件的结果用变量值表述比较容易.
  - 独立重复投掷分币5次, “正面朝上的次数为2”,
  - 无放回抽取产品, “抽取到的次品个数为n”;
  - 简单随机游动, “n 步后移动到的位置 为K”.
- 这些结果值有随机性:

具体取值不能预先确定, 但发生的可能性大小可以预估.

- 例1.1. 100件产品中有5件次品, 95件正品. 随机抽取20件. 抽取出的次品件数在抽取前是一个随机数值, 可能为0, 或1, ..., 或5. 在抽取后为一个确定的值(依赖于抽取结果).
- 定义1.1. 设条件组S下的每一个可能结果ω 都唯一地对应到一个实数值$x = X(\omega)$, 则称实值变量$X(\omega)$ 为一个随机变量, 简记为X.
- 注: 试验结果ω 为自变量, 随机变量的值$X(\omega)$ 为因变量. 随机变量本质上是ω 的函数(将每个ω 映射为某一实数x).
- 与X 相关的事件: 如, $\{X = 0\} := \{\omega : X(\omega) = 0\}$.

例1.2. 盒中5个球, 2白3黑. 从中随机抽取3个. “抽得的白球数” X 是一个随机变量.

- 把球编号, 1, 2, 3号为黑球, 4, 5号为白球.
- 所有结果$C_5^2 = 10$ 种,
  X 的对应关系可列表:
- X 可取0, 1, 2. $\{X = 0\}$, $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$ 都是事件.
- 由古典概型:

$$P(X = 0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10},$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}.$$

ω	$X(\omega)$
123	0
124	1
125	1
134	1
135	1
145	2
234	1
235	1
245	2
345	2

离散型的若干例子

- 例1.3. 单次射击击中概率为0.8, 射击30次, “击中目标的次数” X是随机变量. 取值范围: $0, 1, 2, \ldots, 30$.
  $\{X = 0\}, \{X = 1\}, \cdots, \{X = 30\}$ 都是事件.
- 例1.4. 同上, 连续射击直到第一次击中为止, 所需的“射击次数” X是随机变量. 取值范围: 正整数.
  $\{X = k\}$ 是事件, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
- 例1.5. 某公司有出租车共400 辆. 每辆出租车每天的故障概率为0.02. “一天中有故障的出租车的数目” X 是随机变量, 取值范围: $0, 1, 2, \ldots, 400$.
- **离散型**随机变量: 取有限个或可列个值的.
- 又如, 问卷调查汇总的答卷选择比例, 等等.

连续型的若干例子

- 例1.6. 某公共汽车站每隔5分钟有一辆汽车通过. 某乘客对此规律完全不知情, 因此在任一时刻到达车站都是等可能的. 其“候车时间” X 是随机变量. 取值范围: $[0,5)$(单位: 分钟). $\{X>2\}$, $\{X\leqslant 3\}$, $\{a<X\leqslant b\}$ 都是事件.
- 例1.7. 一门大炮瞄准某个地面目标射击, 以目标为坐标原点建立坐标系. 弹着点的横坐标X 与纵坐标Y 均为随机变量, 范围: 实数(取值是连续的). 弹着点与目标的距离ρ 是随机变量($\rho=\sqrt{X^2+Y^2}$), 取值范围: 非负实数.
- **连续型**随机变量, 取值范围为区间(或若干个区间之并).
- 又如, 医学检验的测量值, 工业生产中随机抽取的一件产品的质量指标(强度、硬度、光洁度、粘合力、纤度. 等等).
- 注: 离散型与连续型之外的其它类型, 本课程不考虑.

§2.2 离散型随机变量

- **离散型随机变量**: 取有限个或可列个值.
- 设X 可取的值为$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$.
- $\{X = x_k\}, k = 1, 2, \ldots$ 构成完备事件组.
- 两种表达交代每个$\{X = x_k\}$ 的概率:
  - X 的**(概率)分布(列)/概率质量函数**(简记PMF):

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

  - X 的(概率)分布(列)表:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

- 直观: 实轴上, 每个x_k 上承载重量p_k. 总重量为1.
- 性质: $p_k \geqslant 0,\ k = 1, 2, \ldots;\ \sum_k p_k = 1$.

例1.2(续). 3黑2白共5个球中任取3个, X =其中的白球数.

- 概率质量函数(PMF)为

$$P(X=0)=0.1,\quad P(X=1)=0.6,\quad P(X=2)=0.3.$$

- X 的概率分布表为

X	0	1	2
p	0.1	0.6	0.3

.

两点分布/二点分布

- 设随机变量X 只能取1, 0, 其分布为

$$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=1-p.$$

  则称X 服从**两点分布**, 也称X 服从**伯努利分布**.
  记为$X\sim \mathrm{B}(1,p)$.

- p 为该分布的参数. 一般假定$0<p<1$.

例2.1. 100件产品中, 95正品, 5次品. 随机抽取一件.

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若取到正品}, \\ 0, & \text{若取到次品}. \end{cases}$$

- $X \sim \mathrm{B}(1, p)$, 其中, $p = 0.95$. 因为

$$P(X = 1) = 0.95, \quad P(X = 0) = 0.05 = 1 - 0.95.$$

- 两点分布仅适用于描述只有两个结果的情况.
  如, 正品/次品, 成功/失败, A 发生/不发生.

- 设每次试验只有“成功”和“失败”两种可能结果，成功概率为p. 独立重复试验n 次，令X 表示其中成功的次数.
- X 的取值范围: $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$.
- 记$q = 1 - p$. 在§1.7中已经证明,

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

- 若随机变量X 的分布如(2.3)所示, 则称X 服从**二项分布**, 记为$X \sim \mathrm{B}(n, p)$. 参数: $n \geqslant 1$, $0 < p < 1$.
- 二项式定理:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

- $B(1, p)$ 即为两点分布.

- 设$\lambda > 0$. 若X 的分布为

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

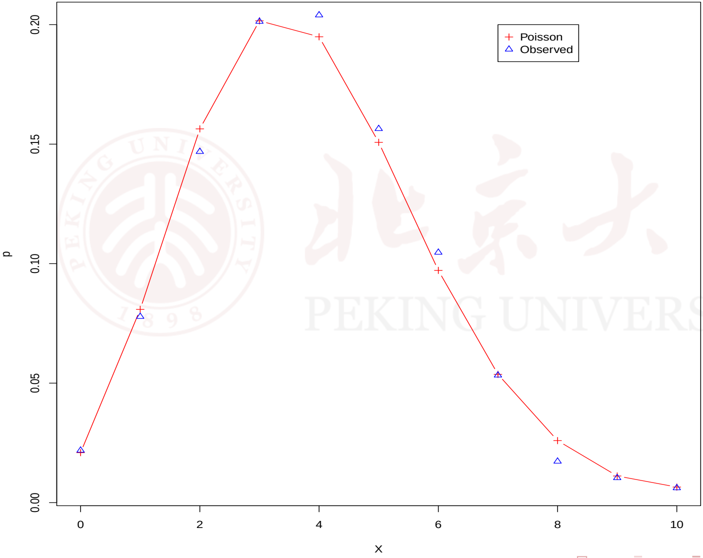
$$k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.4)$$

则称X 服从
(参数为λ的)**泊松分布**,
记为$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

- 例2.2. 放射性物质一段时间放射的α 粒子数记为X.
  - 每次观察7.5秒, 共观察2608次. 统计$X = k$ 的频数(频率).
  - 发现频率接近 Poisson(3.87) 的分布列.

X	频数	频率	p_k
0	57	0.022	0.021
1	203	0.078	0.081
2	383	0.147	0.156
3	525	0.201	0.202
4	532	0.204	0.195
5	408	0.156	0.151
6	273	0.105	0.097
7	139	0.053	0.054
8	45	0.017	0.026
9	27	0.010	0.011
$\geqslant 10$	16	0.006	0.007
总计	2608	1.000	1.000

频率：蓝色三角，泊松分布列：红十字.



泊松分布与二项分布. 粒子数问题的建模与应用:

- 设物质总体积为V. 将它等为n 小块, 每块的体积为$\frac{V}{n}$.
- 假定(1): 各小块放出粒子与否相互独立;

  假定(2): 每小块在7.5 秒内放出两个以上α 粒子的概率小到可忽略; 放出一个α 粒子的概率为$p_n = \mu\frac{V}{n} = \lambda \cdot \frac{1}{n}$.
- 于是对固定的k,

$$P(X = k) \approx C_n^k p_n^k q_n^{n-k}, \qquad (q_n = 1 - p_n).$$

- 往证下式(2.5). 于是推出$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{2.5}$$

- 泊松分布的应用: 生物学、医学、工业、排队等问题.

  如, 容器内细菌数; 铸件或布匹的疵点数; 交换台的接入电话数; 某路口经过的汽车数.

(2.5) 的推导.

- $p_n = \frac{\lambda}{n}$. 固定k. 令$n \to \infty$,

$$C_n^k p_n^k q_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \lambda^k \cdot \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}.$$

- 第二个因子$\to 1$; 第四个因子的分母$\to 1$, 分子:

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \to e^{-\lambda}.$$

- 推论(用泊松分布近似二项分布). 当n 很大, $np \approx \lambda$ 时,

$$C_n^k p_n^k q_n^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

超几何分布

- 设有N 个产品, 其中M 个次品. 从中任取n 个, 其中的次品数记为X. 则(参见第一章例2.5; 按约定, 若$b > a$, 则$C_a^b = 0$)

$$P(X = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- 称X 服从**超几何分布**. N, M, n 为参数.
- 一般而言, $N, M, N - M$ 很大, n 不太大. $(n < M, N - M)$.
- **超几何分布与二项分布**: 次品率$p = \frac{M}{N}$.
- 无放回抽样与放回抽样.
- 固定n. 对任意$m = 0, 1, \cdots, n$,

$$\lim_{N\to\infty, \frac{M}{N}\to p} \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

证明: 固定n, m; 令$N \to \infty$, $\frac{M}{N} \to p$. 如下估算$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

$$= \frac{M!}{(M-m)!m!} \cdot \frac{(N-M)!}{[N-M-(n-m)]!(n-m)!} \cdot \frac{(N-n)!n!}{N!}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{M \cdot (M-1) \ldots [M-(m-1)]}{N^m} \cdot$$

$$\frac{[(N-M)] \cdot [(N-M)-1] \ldots [(N-M)-(n-m-1)]}{N^{n-m}} \cdot$$

$$\frac{N^n}{N \cdot (N-1) \cdots [N-(n-1)]}.$$

- 后三个因子分别趋于p^m; $(1-p)^{n-m}$; 1.

§2.3 连续型随机变量

- 例: 弹着点与目标直接的距离; 等车时间.
- 建模优势: 更准确地描述结果; 描述事件的概率.
- 注: 考虑$\{X > a\}$, $\{a < X \leqslant b\}$等, 一般不考虑$\{X = a\}$.
- 定义3.1. 若存在非负可积函数$p(x)$, $(-\infty < x < \infty)$, 使得

$$P(a < X < b) = \int_a^b p(x)dx, \quad \forall a < b. \tag{3.1}$$

则称X 为**连续型随机变量**;

称$p(x)$ 为X 的**(概率)密度(函数)**(简记PDF). 记为$X \sim p(\cdot)$

密度$p(x)$

- 密度一般是连续或分段连续的函数(且仅有有限个间断点).
- **密度的直观含义**: 若$p(x)$ 在x_0 连续, 则对很小的δ,

$$P\big(X \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\big) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} p(x)dx \approx 2\delta \cdot p(x_0),$$

即, 概率密度 $p(x_0) \approx \dfrac{x_0\text{附近的概率(质量)}}{x_0\text{附近的体积/长度}}$.

注: (概率)密度不是概率(质量).

- $p(x) \geqslant 0$; 且$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$, 因为

$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} p(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$,

其中, $A_n = \{-n < X \leqslant n\} \nearrow \Omega$, 故$P(A_n) \nearrow P(\Omega) = 1$.

- 注: 事件的概率 $\leqslant 1$, 但$p(x_0) \leqslant 1$ 不是必须的.

- 对任意$a \in \mathbb{R}$, $P(X=a)=0$.

  证: 对正整数n,

$$\begin{aligned}\{X=a\} &\subseteq \left\{a-\frac{1}{n}<X<a+\frac{1}{n}\right\}\\ \Rightarrow P(X=a) &\leqslant P\left(a-\frac{1}{n}<X<a+\frac{1}{n}\right)\\ &=\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} p(x)dx \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

- 注: $P(a<X\leqslant b)=P(a<X<b)$. 一般不考虑$\{X=a\}$.
- 改变单个点x_0 的函数值$p(x_0)$, 不影响$p(\cdot)$ 的积分. 因此, 改变后的函数仍为X 的密度.
- 若$p_1(x), p_2(x)$ 都是X 的密度, 且都在x_0 连续,

  则$p_1(x_0)=p_2(x_0)$. (注: 可以尽量进行连续修正.)

均匀分布

- 若X 的概率密度如下:

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & \text{当}x\in[a,b];\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

则称X 服从$[a,b]$ 区间上的**均匀分布**,
记为$X\sim \mathrm{U}[a,b]$ 或$X\sim \mathrm{U}(a,b)$.

- 注: 也可以将$p(a),p(b)$ 改为0; 但不要改其他点的值.
- **均匀分布的直观含义**: 对$a\leqslant c<d\leqslant b$,

$$P(c<X<d)=\int_c^d p(x)=\frac{d-c}{b-a},\quad \text{正比于区间长}d-c.$$

- §2.1 例1.6 中的等车时间服从均匀分布.

指数分布

- 设$\lambda > 0$. 若X 的概率密度如下:
$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & 当x \geqslant 0; \\ 0, & 当x < 0, \end{cases}$$
则称X 服从(参数为λ的) **指数分布**,
记为$X \sim \mathrm{E}(\lambda)$ 或$\mathrm{Exp}(\lambda)$.
- 对$0 \leqslant a < b$,

$$P(a < X < b) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} e^{-t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

$$P(X > a) = \lambda \int_a^{\infty} e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a}, \quad P(X < b) = 1 - e^{-\lambda b},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_0^{\infty} p(x) dx = 1.$$

正态分布

- 设$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. 若X 的概率密度如下:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}. \tag{3.4}$$

  则称X 服从**正态分布**(参数为μ, σ), 记为$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
- 注: 常用σ^2 为参数, 密度中的系数也常写为$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$.
- $p(x)$ 曲线呈钟形, 最大值点在$x = \mu$, 关于$x = \mu$ 轴对称;
- 在$x = \mu \pm \sigma$ 处有拐点.
- 当$x \to \pm\infty$ 时曲线以x 轴为渐近线.
- μ 决定曲线中心位置;

  σ 越大, 曲线越平缓, σ 越小, 曲线越陡峭.

- 称N(0, 1) 为**标准正态分布**, 其密度为

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- 往证$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1$.

$$I := \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy.$$

作极坐标变换, 令$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$,

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} \\ \frac{dx}{d\varphi} & \frac{dy}{d\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

故, $I = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\varphi = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{w}{2}} dw \cdot 2\pi = 2\pi. \quad (w = r^2)$

- $N(0,1)$ 的密度: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.
  $N(\mu, \sigma^2)$ 的密度:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

- 变量替换: $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$. 则$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1$.
- **正态分布的应用**: 测量误差、许多质量指标(如, 产品的长度、强度等), 均可视为服从正态分布.

正态随机变量在区间中的取值概率:

- 设$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. 如下定义的$\Phi(\cdot)$ 没有显示表达.

$$\Phi(x) := P(Z \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt, \quad \phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

- 由对称性, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. 只需研究$x \geqslant 0$ 时的值.
- 定性分析: 由洛必达法则, $x \to \infty$ 时, $1 - \Phi(x) \approx \frac{1}{x}\phi(x)$.

  定量分析: $\Phi(x)$, $(x > 0)$, 已制成表格, 见P.431附表1.
- 设$a < b$. 则$P(a < Z < b) = \int_a^b \phi(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$. 如:

$$P(1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0.9773 - 0.8413 = 0.1360,$$

$$P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.8413 - 1 = 0.6826.$$

- 对$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$，令$t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)dx = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \phi(t)dt$$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P(X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right), \quad P(X > a) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

- 正态分布的经验规则：

$$P(X \in (\mu-\sigma, \mu+\sigma)) = 0.6827,$$

$$P(X \in (\mu-2\sigma, \mu+2\sigma)) = 0.9545,$$

$$P(X \in (\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)) = 0.9973.$$

例3.3. 设$X \sim \mathrm{N}(2, 0.3^2)$, 求$P(X > 2.4)$.

- 解: $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $P(X > 2.4) = 1 - \Phi\left(\frac{2.4-2}{0.3}\right) = 1 - \Phi(1.33)$.
- 附表中$\Phi(1.32) = 0.90658, \Phi(1.35) = 0.91149$.
- 用线性插值公式进行近似处理:

$$
\begin{aligned}
f(x) \approx & f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \\
\Phi(1.33) \approx & 0.90658 + \frac{0.91149 - 0.90658}{1.35 - 1.32} \cdot (1.33 - 1.32) \\
= & 0.9082167.
\end{aligned}
$$

- $P(X > 2.4) \approx 1 - 0.9082167 = 0.0918$.

- 设$\alpha > 0, \beta > 0$. 若X 的概率密度如下:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\text{其中, } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy.$$

  则称X 服从**伽玛分布**(参数为α, β), 记为$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $(\alpha > 0)$; 特别地, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty y^\alpha e^{-y} dy = -\int_0^\infty y^\alpha de^{-y}$$

$$= -y^\alpha e^{-y}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-y} dy^\alpha = \alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \alpha\Gamma(\alpha).$$

- 当$x>0$ 时, $p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$; 当$x\leqslant 0$ 时, $p(x)=0$.
  其中, $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy$, $(\alpha>0)$.
- $\alpha=1$: $\Gamma(1)=1$. 事实上, $\Gamma(1,\beta)=\mathrm{Exp}(\beta)$.
- $\alpha=\frac{1}{2}$: 变量替换$y=\frac{z^2}{2}$, 则

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty(\frac{z^2}{2})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{z^2}{2}}d\frac{z^2}{2}=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\pi}.$$

- 注: 若$Z\sim N(0,1)$, 则$Z^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
- 称$\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ 为自由度为n 的卡方分布, 记为$\chi^2(n)$.
- 称$\Gamma(\alpha,1)$ 为**标准伽玛分布**.

- 设$m > 0, \eta > 0$. 若X 的概率密度如下:

$$p(x) = \begin{cases} m\frac{x^{m-1}}{\eta^m}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

则称X 服从威布尔分布(参数为m, η), 记为$X \sim \mathrm{W}(m, \eta)$.

- m 称为形状参数, η 称为尺度参数.
- 令$y = \frac{x}{\eta}$, $z = y^m = \left(\frac{x}{\eta}\right)^m$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_0^{\infty} my^{m-1}e^{-y^m}dy = \int_0^{\infty} e^{-z}dz = 1.$$

- $\mathrm{W}(1, \eta) = \mathrm{Exp}(\frac{1}{\eta})$.
- 注: 许多机电产品的**寿命**服从威布尔分布. 威布尔分布和指数分布在工业产品的寿命与可靠性研究中有广泛应用.

§2.4 分布函数与随机变量函数的分布

- 定义4.1. 设X 是一个随机变量, 称函数

$$F(x) = P(X \leqslant x), \quad (-\infty < x < \infty), \tag{4.1}$$

为X 的**分布函数**(简记CDF). 记为$F_X(x)$. 也记$X \sim F(\cdot)$.

- 注: 任何一个随机变量都有分布函数.
- 注: 一般而言, X 的分布函数$F_X(\cdot)$ 的自变量选用符号x;

  Y 的分布函数$F_Y(\cdot)$ 的自变量选用符号y.

  但也可选用x, 即$F_Y(x)$, $(x \in \mathbb{R})$ 仍表示Y 的分布函数.

  因为函数的自变量符号的选用不影响函数(映射关系)本身.

分布函数$F(x) = P(X \leqslant x)$ 的性质:

(1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1, \ (-\infty < x < \infty)$;

(2) 单调上升/递增: 若$x \leqslant y$, 则$F(x) \leqslant F(y)$;

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

- 证: $\{X \leqslant -n\} \searrow \emptyset$; $\{X \leqslant n\} \searrow \Omega$.

(4) 右连续: $\lim_{y \to x+} F(y) = F(x)$;

- 证: $\{X \leqslant x + \frac{1}{n}\} \searrow \{X \leqslant x\}$.
- 注: $\{X \leqslant x - \frac{1}{n}\} \nearrow \{X < x\}$.

(5) $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$.

- 证: 将$\{X \leqslant b\}$ 分割为两块: $\{X \leqslant a\}$, $\{a < X \leqslant b\}$.

(6) 若X 为连续型, 则$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

- 证: 连续型蕴含着$P(X = b) = 0$.

离散型随机变量的分布函数:

- 例4.1. 设$X \sim \mathrm{B}(1,p)$. 记$q=1-p$, 则

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ q, & 0 \leqslant x<1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

- 注: 一般而言, 离散性随机变量的分布函数为阶梯函数.
若分布列形如$P(X=x_k)=p_k$, $k=1,2,\cdots$,
则$F_X(\cdot)$ 的间断点/跳点为x_k, 对应的跳跃幅度为p_k.

连续型随机变量的分布函数:

- 设X 是连续型, 密度为$p(x)$, 分布函数为$F(x)$. 则

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt. \tag{4.2}$$

- $F(x)$ 是$p(x)$ 的原函数.
  (1) $F(\cdot)$ 是连续函数;
  (2) 若密度$p(x)$ 在x_0 连续, 则

$$F'(x_0) = p(x_0).$$

- 注: 设$F(x)$ (分段)连续可导, 导函数为$p(x)$; 或存在非负函数$p(x)$ 使得(4.2) 成立. 则X 为连续型, $p(x)$ 即为其密度.

例4.2. 设$\lambda > 0$; 已使用了t 小时的电子管在接下来的Δt 小时内损坏概率为$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. 电子管寿命为0 的概率是0. 求: 电子管在$T$小时内损坏的概率.

- 解: 将电子管的寿命记为X, 视为随机变量.
  记分布函数为$F(\cdot)$, 求$P(X \leqslant T) = F(T)$.
- 由题设,

$$P(t < X \leqslant t + \Delta t | X > t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

- 左边$= \dfrac{P(t < X \leqslant t + \Delta t)}{P(X > t)} = \dfrac{F(t + \Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}$, 故

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = (1 - F(t)) \cdot \left(\lambda + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right).$$

- 令$\Delta t \to 0$, 推出

$$F'(t) = \lambda(1 - F(t)).$$

- $F'(t) = \lambda(1 - F(t)), \ (t > 0).$

  且$F(0) = P(X \leqslant 0) = 0.$ (故, $F(t) = 0, \ (t \leqslant 0)$).

- 解得$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ (t > 0)$. 过程如下: 对$t > 0$,

$$\frac{F'(t)}{1 - F(t)} = \lambda \Rightarrow \frac{d}{dt} \ln\left(1 - F(t)\right) = -\lambda \Rightarrow F(t) = 1 - c \cdot e^{-\lambda t}.$$

  进一步, $F(0) = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

- 电子管子T 小时内损坏的概率:

$$P(X \leqslant T) = F(T) = 1 - e^{-\lambda T}.$$

- 分布密度如下, 故$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

$$p(t) = F'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & \text{当} t > 0, \\ 0, & \text{当} t \leqslant 0. \end{cases}$$

随机变量函数

- 设$f(x)$, $(-\infty < x < \infty)$ 是函数. $Y = f(X)$ 是随机变量.
- Y 是复合函数, $Y(\omega) = f(X(\omega))$.
  若X 取值x, 则Y 取值$y = f(x)$.
- 如: 设X 是分子的速率, $Y = \frac{1}{2}mX^2$ 是分子的动能,
  其中, m 为分子的质量, 视为常数.
- 问题: 已知X 的分布, 如何确定$Y = f(X)$ 的分布?
  目标: 通过X 的分布, 求$Y = f(X)$ 的分布.

离散型随机变量的函数:

- 设X 是离散型, 分布列为$P(x_k) = p_k$, $k = 1, 2, \ldots$
- 相应地, $Y = f(X)$ 取值$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_k), \ldots$
- 若各$f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ 互不相同, 则Y 的分布列为

$$P(Y = f(x_k)) = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- 若$f(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ 中有重复的值. 设所有互不相等的值为$y_1, y_2, \ldots$, 则Y 的分布列形如:

$$P(Y = y_i) = \sum_{k: f(x_k) = y_i} p_k, \quad i = 1, 2, \ldots$$

- 例4.3. & 4.4. X 的分布为

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

.

- 令$Y=2X+1,\ Z=(X-2)^2$.
- Y 的分布:

Y	1	3	5	7	9	11
$P(Y=y_k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

.

- Z 的分布: 对应到每个(可重复) $f(x_i)$ 的概率:

Z	4	1	0	1	4	9
p_k	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

.

- 合并后即得Z 得分布列

Z	0	1	4	9
$P(Z=z_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}+\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

.

连续型随机变量函数:

例4.5. 设$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 令$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. 求$Y$ 的分布.

- 解: Y 的分布函数:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) = & P(Y \leqslant y) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant y) \\
= & P(X \leqslant \mu + \sigma y) = F_X(\mu + \sigma y).
\end{aligned}
$$

- 求导, 推出 $p_Y(y) = p_X(\mu + \sigma y) \cdot \sigma$.
- 将$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ 代入, 即得

$$
p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\mu + \sigma y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.
$$

- 即, $Y \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

求连续型随机变量函数的密度的一般方法:

- 设X 为连续型, 其密度在有限个点$x_1, \cdots, x_n$ 之外(存在且)连续. 则$F'(x) = p(x)$, $x \neq x_1, \cdots, x_n$.
- 定理(习题七第16 & 17题). 若$F'(x)$ 连续, 则X 是连续型, $F'(x)$ 为其密度.

  若$F'(\cdot)$ $**$, 则X 是连续型, 密度如下:

$$p(x) := \begin{cases} F'(x), & x \neq x_1, \cdots, x_n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

- 方法:
  - Step 1. 将Y 的分布函数$F_Y(y)$ 用X 的分布函数表示,
    如$F_Y(y) = F_X(g(y))$, 或$F_X(g_1(y)) - F_X(g_2(y))$, $\ldots$
  - Step 2. 求导, 得到$p_Y(y)$, (用X 的密度表示).
    如$p_Y(y) = p_X(g(y)) \cdot g'(y)$, 或......

例4.6(正态变量的非退化线性变换). 设$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 记$Y = a + bX$, 其中$a, b$为常数, $b \neq 0$. 求Y 的分布.

- 解: $F_Y(y) = P(Y \leqslant y)$: 若$b > 0$, 则

$$F_Y(y) = P(a + bX \leqslant y) = P\left(X \leqslant \frac{y-a}{b}\right) = F_X\left(\frac{y-a}{b}\right);$$

若$b < 0$, 则$F_Y(y) = P\left(X \geqslant \frac{y-a}{b}\right) = 1 - F_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$.

- 求导得$p_Y(y) = p_X(\frac{y-a}{b}) \cdot |\frac{1}{b}|$.
- $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, 故$Y \sim \mathrm{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$:

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|b|\sigma} \exp\left\{-\frac{(y-a-b\mu)^2}{2b^2\sigma^2}\right\}.$$

- 特别地, 若$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$; 反过来, 若$Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$, 则$X = \mu + \sigma Z \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

例4.7. 设圆片的直径服从U[5, 6]. 求: 圆片的面积概率分布.

- 解: $X \sim$ U[5, 6], $Y = \frac{1}{4}\pi X^2$. 求$p_Y(\cdot)$.
- Y 取值范围: $[\frac{\pi}{4}5^2, \frac{\pi}{4}6^2]$.　　故, $y \notin [\frac{\pi}{4}5^2, \frac{\pi}{4}6^2]$ 时, $p_Y(y) = 0$.
- U$[a, b]$ 的密度与分布函数如下: (本题中, $a = 5$, $b = 6$.)

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

- 当$y \in [\frac{\pi}{4}5^2, \frac{\pi}{4}6^2]$ 时, $F_Y(y) = P(\frac{\pi}{4}X^2 \leqslant y)$, 故

$$F_Y(y) = P(|X| \leqslant \sqrt{\frac{4y}{\pi}}) = P(X \leqslant \sqrt{\frac{4y}{\pi}}) = \sqrt{\frac{4y}{\pi}} - 5,$$

$$\Rightarrow p_Y(y) = F'(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}}.$$

例4.8. 设$p_X(x)$ 仅有有限个不连续点, $f'(\cdot)$ 连续且处处大于零. 求: $Y=f(X)$ 的密度$p_Y(y)$.

- 解: $f(\cdot)$ 连续, 严格单调上升, 其值域记为(A,B), $(-\infty\leqslant A<B\leqslant\infty)$, 反函数记为$g(y)$ (定义域: (A,B)).
- 反函数的导数: $g'(y)=\dfrac{1}{f'(g(y))}$.
- 对$y\notin(A,B)$, $p_Y(y)=0$. $\forall y\in(A,B)$, $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)$,

$$F_Y(y)=P(f(X)\leqslant y)=P(X\leqslant g(y))=F_X(g(y))$$

$$\Rightarrow p_Y(y)=F_Y'(y)=p_X(g(y))\cdot g'(y)\ =p_X(g(y))\cdot\frac{1}{f'(g(y))}.$$

- 注: 若改为小于零, 则改为下降, $1-F_X(g(y))$, $|f'(g(y))|$.
- 注: $f(x)$ 可改为除有限个点外连续可导, 但需严格单调.

例. $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, 求$Y = X^2$ 的密度$p_Y(\cdot)$.

- 解: Y 的取值范围: $[0, \infty)$.
- 对任意$y > 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \leqslant y) = P(|X| \leqslant \sqrt{y}) = P(-\sqrt{y} < X \leqslant \sqrt{y}) \\ =& F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ \Rightarrow p_Y(y) =& p_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} - p_X(-\sqrt{y})(-\frac{1}{2\sqrt{y}}). \end{aligned}$$

- 将$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 代入, 推出

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}.$$

- 对$y \leqslant 0$, $p_Y(y) = 0$. 故$Y \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

例4.9. 设$F(\cdot)=F_X(\cdot)$ 是连续函数, 则$Y=F(X)\sim \mathrm{U}[0,1]$.

- 解: $F(x)$ 的值域为$[0,1]$, 所以Y 取值于$[0,1]$.
- 对$y\in(0,1)$, 如下定义的x_0 为实数.

$$x_0 := \inf\{x: F(x)\geqslant y\} = \sup\{x: F(x)<y\}.$$

- $x<x_0$: $F(x)<y$; $x>x_0$: $\underline{F(x)\geqslant y}$; $x=x_0$: $\underline{F(x)\geqslant(=)y}$.
- 情形I: $x<x_0 \Leftrightarrow F(x)<y$; 情形II: $x\geqslant x_0 \Leftrightarrow \underline{F(x)\geqslant y}$.
- 情形I: $x<x_0 \Leftrightarrow F(x)<y$; 情形II: $x\geqslant x_0 \Leftrightarrow F(x)\geqslant y$.
- 改写: $x\to X$, $F(x)\to F(X)=Y$. 由情形I,

$$F_Y(y) = P(Y<y) = P(X<x_0) = F(x_0) = y.$$

(因为 $P(Y=y)\leqslant P(y\leqslant Y<y+\frac{1}{n})\leqslant(y+\frac{1}{n})-y=\frac{1}{n}\to 0.$)

- $Y\sim \mathrm{U}[0,1]$: $F_Y(y)=y$, $0<y<1$; 由$F_Y(\cdot)$ 的单调性知

$$F_Y|_{y\leqslant 0}=0; F_Y|_{y\geqslant 1}=0 \quad\Rightarrow\quad p_Y(y)=1, (0<y<1).$$

例4.10 设函数$F(x)$ 具有下列性质:

(1) 单调上升/递增: 若$x \leqslant y$, 则$F(x) \leqslant F(y)$;

(2) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$;

(3) 右连续: $\lim_{y\to x+} F(y) = F(x)$;

则$F(x)$ 为$X = g(U)$ 的分布函数, 其中$U \sim \mathrm{U}(0,1)$,

$$g(y) = \inf\{x : F(x) \geqslant y\}, \quad (0 < y < 1).$$

- 证: 记$x_0 = g(y)$, 则

  情形I: $x < x_0 \Leftrightarrow F(x) < y$; 情形II: $x \geqslant x_0 \Leftrightarrow F(x) \geqslant y$.
- 情形I: $x < x_0 \Leftrightarrow F(x) < y$; 情形II: $x \geqslant x_0 \Leftrightarrow F(x) \geqslant y$.
- 改写: $y \to U$, $x_0 = g(y) \to g(U) = X$. 由情形II,

$$P(X \leqslant x) = P(x \geqslant X) = P(F(x) \geqslant U) = P(U \leqslant F(x)) = F(x).$$