第八章、假设检验

§8.1 问题的提法

- 例1.1. 200 件产品, b 件次品. 问: 次品率$p(=\frac{b}{200}) \leqslant 3\%$?
  方法: 抽查10 件, 观察数据(例如: 发现2 件次品).
- 例1.2. 纸币长度$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 问: $\mu = 155\text{mm}$?
  方法: 测量10 张纸币的长度, 得到数据$(x_1, \cdots, x_{10})$.
- 检验与估计相同之处.
  模型: $X \sim F_\theta$, $\theta \in \Theta$. 目标: 对θ 做出一些结论.
  方法: 抽样, 产生数据$X_1, \cdots, X_n \sim$ i.i.d. F_θ.
- 检验与估计不同之处.
  估计: 输出值$\hat{p}$, $\hat{\mu}$, 或者区间.
  检验: 回答问题, 输出“是”或“否”.

- 定义1.1. 零假设/原假设$H_0 : \theta \in \Theta_0$.
  对立假设/备择假设$H_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \backslash \Theta_0$.
  检验问题(Θ_0, Θ_1). $H_0 : \theta \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- 问题的提法: H_0 是否成立?
- 检验方法: 给出一个否定域$\mathcal{W}$ $(\subseteq \mathbb{R}^n)$.
  若数据$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{W}$, 则输出 “拒绝(否定) H_0” ;
  若$\vec{x} \notin \mathcal{W}$, 则输出 “不拒绝(接受) H_0” .

检验方法= 带概率的反证法.

- 寻找$\mathcal{W}$ 使得

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \theta \in \Theta_0.$$

- $\vec{x} \in \mathcal{W}$: 假设H_0 成立, 那么小概率事件$\{\vec{X} \in \mathcal{W}\}$ 发生了, 矛盾! 因此, 原假设H_0 不成立. 即, 否定H_0.
  注: 在指定水平下有充分证据表明H_0 不成立, 推出H_1 成立.
  强烈的否定!
- $\vec{x} \notin \mathcal{W}$: 没有足够充分的证据表明$H_0$ 不成立.
  但同样不代表已经有充分的证据接受H_0, 微弱的接受.
- 两类错误:
  第一类: H_0 为真, 否定H_0. 犯错概率$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$, $\theta \in \Theta_0$.
  第二类: H_0 为假, 接受H_0. 犯错概率$P_\theta(\vec{X} \notin \mathcal{W})$, $\theta \in \Theta_1$.

例1.6. 药品检验. 药效$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知.

若$\mu \geqslant \mu_0$, 则药有效; 若$\mu \leqslant \mu_0$, 则药无效.

- 怎样提H_0?

$$H_0: \mu \geqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu < \mu_0$$

$$H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0.$$

- 控制第一类错误, 即H_0 为真却输出“认定H_1”的概率

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha.$$

- 防止假药上市, 即$\mu \leqslant \mu_0$ 为真却输出“认定$\mu \geqslant \mu_0$”.
- 因此, 应该选$H_0: \mu \leqslant \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$.

- 定义1.2. 称$\beta_{\mathcal{W}}(\theta) := P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W})$ 为$\mathcal{W}$ 的功效函数. 若

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0,$$

  则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的一个(显著性)水平为α 的否定域.

- 注: 选取$\mathcal{W}$, 使得$\beta_{\mathcal{W}}(\theta)$ 在Θ_0 小, 在Θ_1 越大越好.
- 定义1.3. 若$\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的否定域, 并且对任意水平为α 的否定域$\tilde{\mathcal{W}}$ 都有:

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\theta(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

  则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的一致最大功效否定域/UMP否定域.

- 定义1.4. 若

$$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha \leqslant P_{\theta_1}(\vec{X} \in \mathcal{W}), \quad \forall \theta_0 \in \Theta_0, \theta_1 \in \Theta_1,$$

则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的一个水平为α 的无偏否定域.

- 定义1.5. 若$\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的无偏否定域, 并且对任意水平为α 的无偏否定域$\tilde{\mathcal{W}}$ 都有:

$$P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \geqslant P_\theta(\vec{X} \in \tilde{\mathcal{W}}), \quad \forall \theta \in \Theta_1,$$

则称$\mathcal{W}$ 为检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的一致最大功效无偏否定域/最优无偏否定域/UMPU 否定域.