§7.7 置信区间和置信限

定义7.1. 假设$\underline{T} = \underline{T}(X_1, \cdots, X_n)$ 与$\bar{T} = \bar{T}(X_1, \cdots, X_n)$ 为统计量, $\alpha \in (0, 1)$.

(1) 若$\underline{T} < \bar{T}$ 且

$$P_\theta(\underline{T} \leqslant g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称$[\underline{T}, \bar{T}]$ 为$g(\theta)$ 的置信度为$1 - \alpha$ 的置信区间.

(2) 若

$$P_\theta(\underline{T} \leqslant g(\theta)) \geqslant 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称$\underline{T}$ 为$g(\theta)$ 的置信度为$1 - \alpha$ 的置信下限.

(3) 若

$$P_\theta(g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

则称$\bar{T}$ 为$g(\theta)$ 的置信度为$1 - \alpha$ 的置信上限.

1. 枢轴量法

- 定义7.2. 假设$g(\theta)$ 是待估量. 若

$$h = h(X_1, \cdots, X_n; g(\theta))$$

的分布与θ 无关, 则称h 为枢轴量.

- Step 1. 找枢轴量$h = h(\vec{X}, g(\theta))$ 及其分布F.
- Step 2. 利用F 选择a, b, 使得:

$$P(a \leqslant h \leqslant b) \geqslant 1 - \alpha.$$

- Step 3. 将$a \leqslant h \leqslant b$ 化为$\underline{T} \leqslant g(\theta) \leqslant \bar{T}$, 于是得到

$$P(\underline{T} \leqslant g(\theta) \leqslant \bar{T}) \geqslant 1 - \alpha.$$

例7.1. 总体: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. 样本量: n. 求λ 的置信区间.

- $\lambda X \sim \mathrm{Exp}(1)$, 因此,

$$h_1 = \lambda(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma(n, 1).$$

- $2\lambda X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$, 因此

$$h_2 = 2\lambda(X_1 + \cdots + X_n) \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2n).$$

- 查$\chi^2(2n)$ 的表获得$\lambda_1 = \chi^2_{\alpha/2}(2n)$, $\lambda_2 = \chi^2_{1-\alpha/2}(2n)$. 于是, $P_\lambda(\lambda_1 \leqslant h_2 \leqslant \lambda_2) = 1 - \alpha$. 从而, 所求为$[\underline{T}, \bar{T}]$, 其中,

$$\underline{T} = \frac{\lambda_1}{2(X_1 + \cdots + X_n)}, \quad \bar{T} = \frac{\lambda_2}{2(X_1 + \cdots + X_n)}.$$

- 定义3.6.8 & 7.3. n 维正态分布$N(\vec{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ 的联合密度为:

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{|\mathbf{\Sigma}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right\}.$$

其中, $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)^T$, $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ 正定.

- 定义3.6.6, 3.6.7 & 7.4.

$\vec{X} = (X_1, \cdots, X_n)^T$ 的期望与协方差阵分别指

$$E\vec{X} = (EX_1, \cdots, EX_n)^T, \quad \mathrm{cov}(\vec{X}, \vec{X}) = (\mathrm{cov}(X_i, X_j))_{n\times n}.$$

$\vec{X}$ 与$\vec{Y} = (Y_1, \cdots, Y_m)^T$ 的协方差阵指

$$\mathrm{cov}(\vec{X}, \vec{Y}) = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X_1, Y_1) & \cdots \mathrm{cov}(X_1, Y_m) \\ \mathrm{cov}(X_n, Y_1) & \cdots \mathrm{cov}(X_n, Y_m) \end{pmatrix}_{n\times m}.$$

- 引理7.1. 矩阵运算, 例: $\mathrm{cov}(\mathbf{A}\vec{X}, \vec{Y}) = \mathbf{A}\mathrm{cov}(\vec{X}, \vec{Y})$.
- 引理7.2. 假设$\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, \mathbf{\Sigma})$.

(1) $E\vec{X} = \vec{\mu}$, $\mathrm{cov}(\vec{X}, \vec{X}) = \mathbf{\Sigma}$;

(2) 设$\mathbf{B}_{n\times n}$ 非退化, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, 则$\vec{a} + \mathbf{B}\vec{X}$ 服从n 维正态分布;

(3) 设$1 \leqslant m < n$, 则$(X_1, \cdots, X_m)^T$ 服从m 维正态分布;

(4) 设$1 \leqslant m < n$, $\mathbf{A}_{m\times n}$ 行满秩, 则$\mathbf{A}\vec{X}$ 服从m 维正态分布.

- 定理7.1. 假设总体: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本量: n. 则

(1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{1}{n}\sigma^2\right)$;

(2) $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$;

(3) $\bar{X}$ 与$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 相互独立.

- 证: $X_i = \mu + \sigma Z_i$, 其中$Z_i = X_i^* \sim N(0,1)$, i.i.d..
- $\bar{X} = \mu + \sigma \bar{Z}$, $\quad \star = \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - n\bar{Z}^2$.
- 取正交矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$, 其第一行是$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 令$\vec{Y} = \mathbf{A}\vec{Z}$.
- 由$\mathbf{A}$ 正交, $\vec{Y} \sim N(\vec{0}, \mathbf{I}_{n\times n})$ 且$\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$.

  由$\mathbf{A}$ 的第一行, $Y_1^2 = n\bar{Z}^2$. 于是, $\star = \sum_{i=2}^n Y_i^2 \sim \chi^2(n-1)$.
- $\bar{Z} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_1 \sim N(0, \frac{1}{n})$, 且与$\sum_{i=2}^n Y_i^2$ 独立. 故, (1), (3) 成立.

例7.2 & 7.3. σ^2 已知, (例如, $X \sim N(\mu, 1)$).

求: μ 的置信度为$1-\alpha$ 的(1) 置信区间, (2) 置信上限.

- 取$h = h(X_1, \cdots, X_n, \mu) := \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$.
- (1) 查表获得$z_{1-\alpha/2}$, 于是$P_\mu(|h| \leqslant z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$. 因此,

$$P_\mu\left(|\bar{X}-\mu| \leqslant \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

- 概率论角度: $\bar{X} \in [\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x]$,
  未知的随机点$\bar{X}$ 落在已知的确定区间中.
- 统计学角度: $\mu \in [\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}x]$ (此即所求置信区间),
  已知的随机区间(可由数据得到)覆盖未知参数μ (确定的点).
- (2) 置信上限为$\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$:
  $P_\mu(h \geqslant z_\alpha) = 1-\alpha \Rightarrow P_\mu\left(\bar{X} \leqslant \mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right) = 1-\alpha$.

例7.4. σ^2 未知. 求: μ 的置信度为$1-\alpha$ 的置信区间.

- $\tilde{h} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$ 仍然成立.
- 但是, $\tilde{h}$ 不是枢轴量!

  枢轴量只能含数据和待估量, 不能含讨厌参数σ^2.
- 例7.2中的$\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$ 含σ^2, 不是统计量.
- 用σ^2 的UMVU 估计$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 代替σ^2.

  将证明

$$h = h(X_1, \cdots, X_n; \mu) := \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{S^2}}$$

  是枢轴量.

- 定理7.1 的证明: $X_i = \mu + \sigma Z_i$. 正矩矩阵$\mathbf{A}_{n\times n}$ 的第一行是$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 令$\vec{Y} = \mathbf{A}\vec{Z}$, 则$Y_1, \cdots, Y_n \sim$ i.i.d. $N(0,1)$.
- 考察

$$h = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sqrt{S^2}}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

- 考察分子: $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu) = \sigma\sqrt{n}\bar{Z} = \sigma Y_1$.

  考察分母: $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sigma^2 \sum_{i=2}^{n} Y_i^2$. 于是,

$$h = \frac{Y_1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2}}.$$

- 自由度为n 的t 分布(记为$t(n)$) 指的是

$$T_n := \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}(Z_1^2 + \cdots + Z_n^2)}}$$

  服从的分布, 其中$Z, Z_1, \cdots, Z_n$ 独立同分布, $Z \sim N(0,1)$.

- 因此,

$$h = h(X_1, \cdots, X_n; \mu) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sqrt{S^2}} \sim t(n-1),$$

其中

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 =: \hat{\sigma}^2$$

为σ^2 的UMVU 估计.

- 查表获得$t_{1-\alpha/2}(n-1)$. 因此

$$P_\mu\left(|\bar{X} - \mu| \leqslant \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha.$$

- 所求置信区间为

$$\left[\bar{X} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1),\ \bar{X} + \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right].$$

例7.5. $\theta=(\mu,\sigma^2)$. 求σ^2 的置信度为$1-\alpha$ 的置信上限.

- 枢轴量: 由定理7.1,

$$h := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

- 查表获得$\chi^2_\alpha(n-1)$, 于是

$$P_\theta\left(h \geqslant \chi^2_\alpha(n-1)\right) = 1-\alpha.$$

因此,

$$P_\theta\left(\sigma^2 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

- 所求置信上限为$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}$.
- 注: 若μ 已知, 则枢轴量和置信上限应为

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n), \quad \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\chi^2_\alpha(n)}.$$

- 定理7.2. 假设$T_n = T_n(X_1, \cdots, X_n)$ 满足

$$\sqrt{n}(T_n - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

则$g(\theta)$ 的近似置信区间估计为:

(1) σ^2 已知: $[T_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, T_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}]$,

(2) σ^2 未知: $[T_n - \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}, T_n + \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}]$, 其中$\hat{\sigma}_n$ 为σ 的相合估计.

例7.6. 90 人中15 人反应课业负担重, 求: 负担重的百分比θ的0.95 置信区间.

- 总体: $X \sim B(1,\theta)$, 样本量: $n = 90$.
- 由CLT,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

于是,

$$P_\theta\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\right| \leqslant z_{1-\alpha/2}\right) \approx 1-\alpha.$$

- 查表获得$z_{0.975} = 1.96$, 于是

$$\left|\frac{\sqrt{90}(\frac{15}{90}-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}\right| \leqslant 1.96 \Rightarrow \theta \in [0.1037, 0.2569],$$

此即所求的近似置信区间.