定理 (Chebyshev's WLLN, 定理2.1)

假设$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, 且$\mathrm{var}(X_i) \leqslant M$, $\forall i$. 那么,

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0.$$

- 令$A_n = \{|\frac{1}{n}(S_n - ES_n)| \geqslant \varepsilon\}$. 需验证$P(A_n) \to 0$.
- 由切比雪夫不等式,

$$\begin{aligned} P(A_n) =& P(|S_n - ES_n| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{1}{(n\varepsilon)^2}\mathrm{var}(S_n) \\ \leqslant& \frac{nM}{n^2\varepsilon^2} = \frac{M}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \to 0. \end{aligned}$$

- "相互独立"可减弱为"两两不相关".

- 推论2.1. 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, $\mathrm{var}(X_1) < \infty$, 则

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} EX_1.$$

- 推论2.2. 单次试验中A 发生的概率为p, 则

$$n \text{ 次试验中} A \text{ 发生的频率} \xrightarrow{P} \mu.$$

- 例2.1. 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 密度为$p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$.
  不加证明地接受: $\frac{S_n}{n}$ 与X_1 有相同的密度. 于是,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| > \varepsilon\right) = P(|X_1 - a| > \varepsilon) \text{ 不趋于0.}$$

定理 (Cantelli's SLLN, 定理2.2, 引理2.1)

假设$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, EX_i 存在, 且$E(X_i - EX_i)^4 \leqslant M$, $\forall i$. 那么,

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

- 不妨设$EX_i = 0$. 否则将$X_i - EX_i$ 视为新的X_i.
- 记$A_n = \{|\frac{1}{n}S_n| \geqslant \varepsilon\}$. 则仅需验证$P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \to 0$.
- 次可列可加性:

$$P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} P(A_m).$$

- 4 阶“切比雪夫”不等式:

$$P(A_m) = P\left(S_m^4 \geqslant (m\varepsilon)^4\right) \leqslant \frac{1}{m^4\varepsilon^4} ES_m^4.$$

- 展开:

$$ES_m^4 = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^4 = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{m} EX_iX_jX_kX_\ell.$$

- 同类项: r, s, t, u 互不相等,

$$EX_r^4, EX_r^3X_s, EX_r^2X_s^2, EX_r^2X_sX_t, EX_rX_sX_tX_u.$$

- $EX_s = 0 \Rightarrow EX_r^3X_s = EX_r^2X_sX_t = EX_rX_sX_tX_u = 0.$
- $EX_r^4 \leqslant M$, 且

$$EX_r^2X_s^2 = \left(EX_r^2\right)\left(EX_s^2\right) \leqslant \sqrt{EX_r^4}\sqrt{EX_s^4} \leqslant M.$$

- 于是,

$$ES_m^4 \leqslant mM + C_m^2C_4^2M \leqslant 3m^2M.$$

$$\Rightarrow P(A_m) \leqslant \frac{3M}{\varepsilon^4} \times \frac{1}{m^2} \Rightarrow P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} P(A_m)\right) \to 0.$$

- 推论2.3. 设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, EX_1^4 存在, 则$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 推论2.4. 单次小试验中事件A 发生的概率为p. 在独立重复试验中, 前n 次试验中A 发生的频率$\xrightarrow{\text{a.s.}} p$.
- 定理2.4. (Kolmogorov's SLLN). 假设$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 期望存在, 则$\frac{1}{n}S_n \xrightarrow{\text{a.s.}} EX_1$.
- 时间平均= 空间平均, (期望的含义).

应用(1): 统计方法的理论依据.

- 数据: $X_1, \cdots, X_n$ 为X 的n 次独立观测值, 它们独立同分布.
- 估计期望:

$$\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} EX.$$

- 估计方差:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{X})^2 \xrightarrow{\text{a.s.}} EX^2 - (EX)^2 = \operatorname{var}(X).$$

应用(2): 计算机模拟期望、概率.

- 例2.3. 设有m 枚炮弹同时射击, 第i 枚炮弹落点为(x_i, y_i),

$$\varphi(x_1, y_1; \cdots; x_m, y_m) = \begin{cases} 1, & \text{若落点造成有效毁伤;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

- 设第i 枚炮弹的瞄准点为(a_i, b_i), 实际落点(X_i, Y_i).
模型假设: $X_1, \cdots, X_n; Y_1, \cdots, Y_n$ 相互独立, 且

$$X_i \sim N(a_i, \sigma_1^2), \quad Y_i \sim N(b_i, \sigma_2^2).$$

- SLLN:

$$P\big(\varphi(X_1, Y_1; \cdots; X_m, Y_m) = 1\big)$$
$$\approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(X_1^{(k)}, Y_1^{(k)}; \cdots; X_m^{(k)}, Y_m^{(k)}\right).$$

应用(3): 估计积分$I = \int_a^b f(x)dx$.

- $I = \int_0^1 f\big(a + (b-a)u\big)(b-a)du$, 因此不妨假设$a = 0$, $b = 1$.
- $I = \int_0^1 f(x) \cdot 1 dx = Ef(U)$.
- SLLN:

$$I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(f(U_1) + \cdots + f(U_n) \right).$$