## §3.5 二维随机向量的数字特征

- 定义5.1. 假设$X$, $Y$ 的方差存在, 则称

$$E(X-EX)(Y-EY)$$

为$X$ 与$Y$ 的协方差, 记为$\mathrm{cov}(X,Y)$, $\sigma_{XY}$.
若$\sigma_{XY}=0$, 则称$X$ 与$Y$ 不相关.

- 注: 协方差存在, 因为

$$2(X-EX)(Y-EY)\leqslant (X-EX)^2+(Y-EY)^2.$$

- 计算公式: $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-(EX)(EY)$.

- 定理5.1. 假设$X, Y$ 的方差存在, 则称

$$(\mathrm{cov}(X,Y))^2 \leqslant \mathrm{var}(X)\cdot \mathrm{var}(Y).$$

- 证: 若$\mathrm{var}(X)=0$, 则$X\equiv c$, 于是$\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

  若$\mathrm{var}(X)>0$, 则$g(t)$ 的判别式$\leqslant 0$, 其中

$$\begin{aligned} g(t) :=& E\left(t(X-EX)+(Y-EY)\right)^2 \\ =& t^2\mathrm{var}(X)+2t\mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{var}(Y)\geqslant 0. \end{aligned}$$

- 定义5.2. 设$0<\mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y)<\infty$, 则称

$$\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}$$

  为$X$ 与$Y$ 的相关系数, 记为$\rho_{XY}$, 简记为$\rho$.

- 定理5.2. (1) $|\rho| \leqslant 1$; (2) $X$ 与$Y$ 独立, 则不相关, 从而$\rho = 0$; (3) $|\rho| = 1$ 当且仅当存在$a, b$ 使得$Y = a + bX$.
- 证(3): $|\rho| = 1$ 当且仅当$g(t)$ 的判别式为0, 即存在$t_0$ 使得

$$\begin{aligned} g(t_0) =& E\left(t_0(X - EX) + (Y - EY)\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & Y = -t_0 X + EY + t_0 EX. \end{aligned}$$

- 最优线性预测(定理5.3): 设$0 < \mathrm{var}(X), \mathrm{var}(Y) < \infty$, 则

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} E(Y - (a + bX))^2 = \mathrm{var}(Y)(1 - \rho_{XY}^2).$$

最小值点为:

$$b = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\mathrm{var}(X)}, \quad a = EY - bEX.$$

例5.2. 二维正态的密度:

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)} \qquad u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}.$$

- 已有: $\mu_1 = EX$, $\mu_2 = EY$, $\sigma_1^2 = \mathrm{var}(X)$, $\sigma_2 = \mathrm{var}(Y)$.
- $\rho_{X,Y} = \frac{E(X-\mu_1)(Y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} = E\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} uv\cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2+v^2-2\rho uv)}dvdu.$$

- 先对$v$ 积分, $v^2-2\rho uv+u^2 = (v-\rho u)^2+(1-\rho^2)u^2$,

$$\star\star = e^{-\frac{u^2}{2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} ve^{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}}dv = e^{-\frac{u^2}{2}} \times \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\cdot\rho u.$$

- 再对$u$ 积分,

$$\rho_{XY} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}dx = \rho.$$