§2.4 随机变量的严格定义与分布函数

- 定义4.1. 假设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是概率空间, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足:

$$\text{对任意} x \in \mathbb{R} \text{ 都有} \{X \leqslant x\} \in \mathcal{F},$$

则称X 是一个随机变量.

- 定义4.2. 令$F(x) = P(X \leqslant x)$, $x \in \mathbb{R}$. 称F 为随机变量X 的分布函数, 也记为F_X.

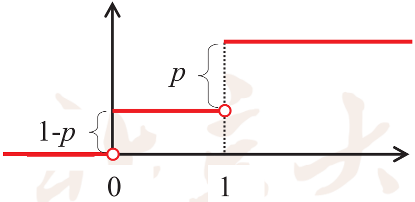
- 定理4.2. $F = F_X$ 的三条性质:

(1) 单调性: 若$x \leqslant y$, 则$F(x) \leqslant F(y)$.

(2) 规范性: $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

(3) 右连续性: $\lim_{y\to x+} F(y) = F(x)$.

- 离散型: $P(X = x_i) = p_i$. x_i 为F_X 的跳点, p_i 为跳跃幅度.



- 连续型: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p(z)dz$, 且

$$p(x) = F'_X(x).$$

反过来, 若F_X "几乎"连续可导, 则为连续型(定理4.3, 4.4).

- 尾分布函数: $G(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$.
  连续型: $p(x) = -G'(x)$.
- 例. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

$$G(x) = e^{-\lambda x}, \quad \forall x > 0,$$

$\Rightarrow G'(x) = -\lambda G(x)$. $\quad \lambda$: 速率.

- 由$F_X(x)$ 可求出$P(X \in B), \forall B$.
- 若$F_X = F_Y$, 则称X 与Y 同分布, 记为$X \overset{d}{=} Y$.
- $X = Y$, 即$P(X = Y) = 1$, 则$F_X = F_Y$. 反之不然.