§1.5 条件概率与独立性

例5.1 设盒中有3个白球、2个红球, 从中取出一个球, 发现是白球. 从剩下的4个球中任取一个, 求: 它还是白球的概率(记为p).

- 建模: 不放回抽样, 白球$1\sim 3$, 红球$4,5$. $\omega=(i,j)$.
- $A=\{\omega: i\leqslant 3\}$, $B=\{\omega: j\leqslant 3\}$.
- $$\begin{array}{ccccc}
 & (1,2)\surd & (1,3)\surd & (1,4) & (1,5) \\
(2,1)\surd & & (2,3)\surd & (2,4) & (2,5) \\
(3,1)\surd & (3,2)\surd & & (3,4) & (3,5) \\
(4,1)\surd & (4,2)\surd & (4,3)\surd & & (4,5) \\
(5,1)\surd & (5,2)\surd & (5,3)\surd & (5,4) &
\end{array}$$
- $p=P(AB)/P(A)=6/12=1/2$, $p\neq 3/5=P(B)$.

- 定义5.1. 假设$P(A)>0$. 称$\frac{P(AB)}{P(A)}$为已知A发生的条件下, B 的条件概率. 记为$P(B|A)$.
- 按照定义直接计算条件概率$P(B|A)$.
- 条件概率指"重新分配权重": $P(B|A)$ vs $P(B)=P(B|\Omega)$.
  给定A, 条件概率$P(\cdot|A)$: 满足概率定义的三个条件.
- 简化模型给出条件概率: 在假设A发生时, 简化模型.
  例5.1: 3白2红. $A=$一白, $B=$二白. (若) A发生, 则第二次在2白2红中抽取, $P(B|A)=2/4$.

- 乘法公式:

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

- 定理5.1(一般乘法公式):

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdots A_n) &= P(A_1 \cdots A_{n-1})P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}) = \cdots \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

例5.4 将52张牌随机均分4堆, 求: 各堆都含Ace的概率.

- 解法一、分别将桃杏梅方Ace 称为A-1, A-2, A-3, A-4. 记 E_{k,i_k} = 第k 堆含A-i_k 但不含其它Ace.
- $E_{i_1 i_2 i_3 i_4} = E_{1,i_1} E_{2,i_2} E_{3,i_3} E_{4,i_4}$,

$$P(E_{i_1 i_2 i_3 i_4}) = \frac{C_{48}^{12}}{C_{52}^{13}} \cdot \frac{C_{36}^{12}}{C_{39}^{13}} \cdot \frac{C_{24}^{12}}{C_{26}^{13}}, \quad i_1, i_2, i_3, i_4 \text{互不相等}$$

- 当(i_1, i_2, i_3, i_4) 取遍$1, 2, 3, 4$ 的全排时, 所有$E_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ 互不相交, 并起来为E. 因此,

$$P(E) = 4! \times \star\star = \frac{3 \times 2 \times 13^3}{51 \times 50 \times 49}.$$

- 解法二、记

  A_1 = 红心Ace与黑桃Ace不在一组;

  A_2 = 梅花Ace与红心Ace黑桃Ace都不在一组;

  A_3 = 方块Ace与其他Ace都不在一组.
- 则$E = A_1A_2A_3$.
- $P(A_1) = \frac{3\times13}{51}$, $P(A_2|A_1) = \frac{2\times13}{50}$, $P(A_3|A_1A_2) = \frac{13}{49}$.
- 因此,

$$P(E) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) = \frac{3\times2\times13^3}{51\times50\times49}.$$

- 定义5.2. 若$P(AB)=P(A)P(B)$, 则称A 与B (相互)独立.
- 直观含义: A 的发生不改变B 的概率, 即$P(B|A)=P(B)$.
- 应用一、判断A, B 是否相互独立. 例5.6.
- 应用二、假设A, B 相互独立. 例5.7.
- 定理5.2. 若A 与B 独立, 那么, A 与B^c 也独立.

  推论: 同理, A^c 与B 独立; 进一步, A^c 与B^c 独立.

  推论: 反过来, A 与B^c 独立, 则A 与B 独立. 类似地, $\cdots\cdots$.

例5.6. 盒中有5 个乒乓球, 3个新球, 2个旧球. 有放回地取两次, 每次随机取一个球. 令

$$A = \text{“第1次取到新球”}, \quad B = \text{“第2次取到新球”}.$$

问: A, B 独立吗?

- $P(B|A) = P(B) = \frac{3}{5}$.
  因此, $P(AB) = P(A)P(B)$, 即A 与B 独立.
- 若改为不放回地取两次呢?
- 则改为$P(B|A) = \frac{2}{4} \neq P(B)$.
  因此, $P(AB) \neq P(A)P(B)$, 即A 与B 不独立.

例. 甲、乙玩石头剪子布. 用A_0, A_2, A_5 分别表示甲出石头, 剪刀, 布; 类似地, 有B_0, B_2, B_5. 假设 $P(A_i) = P(B_j) = \frac{1}{3}$ 且A_i 与B_j 相互独立, $i, j = 0, 2, 5$.

令$C =$ 甲赢. 研究A_2, B_5, C 的独立性.

- 假设等价于建立古典概型: $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{0, 2, 5\}\}$.

$$\begin{array}{lll} (0,0) & (0,2)_C & (0,5)_B \\ (2,0)_A & (2,2)_A & (2,5)_{A,B,C} \\ (5,0)_C & (5,2) & (5,5)_B \end{array}$$

- $P(C) = \frac{1}{3}$.
- $P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{9}$. 故$A$ 与B 独立; A 与C 独立; B 与C 独立.
- 但是, $P(C|AB) = 1 \neq P(C)$.

- 定义5.3. 事件A, B, C 相互独立指:

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)P(C);\quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

- 定义5.4. n 个事件$A_1,\cdots,A_n$ 相互独立指:

$$P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdots P(A_{i_k}),$$

对任意$2\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$ 都成立.

- 定理5.3. 例: 若$A_1,\cdots,A_4$ 相互独立且$P(A_1A_3)>0$, 则$P(A_2|A_1A_3)=P(A_2)$.

- 习题一、19. 例: 若$A_1,\cdots,A_4$ 相互独立, 则, A_1^c,A_2,A_3^c,A_4 相互独立, A_2,A_3^c,A_4^c 相互独立.

例5.9. 假设每门高射炮击中敌机的概率为0.6. 现在若干门同时发射. 问: 若要以99% 的把握击中敌机, 需要配几门?

- 假设配n 门. 记A_i = "第i 门击中敌机". 则

$$A = \text{“击中敌机”} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

- $A^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$, 因此,

$$P(A^c) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c) = 0.4^n.$$

- $P(A) = 1 - 0.4^n$. 要求$1 - 0.4^n \geqslant 0.99$, 即

$$n \geqslant \frac{\lg 0.01}{\lg 0.4} = \frac{2}{0.3979} = 5.026.$$

- 因此, 需要至少6 门高射炮.