

在廖山涛先生诞辰一百周年纪念会上的发言

北京大学 孙文祥

线上线下各位嘉宾，各位老师，各位同学，上午好：

很高兴在廖先生百年纪念会上发言，谈谈我了解的廖先生和廖理论在光滑遍历论的贡献。

1994 年，经廖山涛先生，文兰教授，周作领教授推荐，我来到北京大学数学系做博士后，加入微分动力系统研究团队，合作导师是廖山涛先生。从那时候开始学习廖先生的论文，在研究工作中运用廖理论，逐渐领略到廖理论的大气，精美。

在光滑遍历论和微分动力系统两方面廖先生都做出了重要贡献。他相继提出“典范方程组”和“阻碍集”两个基本概念，形成了系统的理论和方法。在该领域公认最重要最困难的问题如乘法遍历定理、封闭引理、稳定性猜测上取得了重要成果。在此举一例。1963 年发表在北京大学数学学报(中文版)的论文中，他建立了乘法遍历定理，1968 年前苏联数学家 Oseledets 也证明了这个定理。这是光滑遍历论学科的基本重要定理(其基本重要性相仿于常微分方程理论中 Cauchy 解的存在唯一性定理，相仿于线性代数中的 Jordan 标准型)，本学科的其他重要定理均会直接或间接地用到乘法遍历定理。由于其基本性和重要性，在廖山涛，Oseledets 之后，乘法遍历定理还有多达 15 位数学家给出过不同版本的证明，包括我的一个证明。这些版本的每一个都有其它版本不能覆盖的部分，都有新意，但是本质是相同的，

即几乎所有状态点的所有非零向量在切算子迭代下的指数增长率极限存在，亦即 Lyapunov 指数存在。而这个本质的东西在廖先生的工作中已经包含了，他的定理中确定的极限恰恰是全部的 Lyapunov 指数，一个不多一个不少。廖的定理建立在覆盖流形系统的标架丛系统上，Oseledets 定理则直接建立在流形系统上，便于应用。1993 年廖先生也写了一个流形系统的版本。因中文在国际数学界没有英文那样广泛使用，国外数学家第一个接触的可能是 Oseledets 的证明，并称此乘法遍历定理为 Oseledets 定理。当然，廖先生的原始贡献已经被学界认可，国外数学家如 J. Sell 综述定理发展历史时称廖的证明是原始的。2017 年在一个国际学术会议上，我的报告恰巧紧挨着 Oseledets 教授的报告，而我报告的 ppt 里恰巧引用了乘法遍历定理，引用的是顺序是廖 1963，Oseledets 1968。在我的报告后，Oseledets 没有提问，他应该是认可这种引用顺序的。提问环节，德国数学家 Arlnod 请我讲了一下廖定理的完整叙述和大致证明思路。

廖先生在 1963 年他关于微分动力系统的第 1 篇论文的论文前言里面，预见性地指出，微分动力系统的研究“主要是大范围的，可能有一部分是拓扑的，也有一部分是统计式的”，而他的第 1 篇文章是“就这统计式的一部分提供若干基础。”乘法遍历定理就是这文中的一个“基础”定理。廖先生早年从事拓扑学研究且卓有成就，1960 年代初，敏锐观察到“一个成熟的研究领域可以期待”（巴西数学家 Peixoto 的原文，也是获第三世界科学院数学奖得主），而转移研究方向—微分动力系统。在新领域研究中，他自己搭建研究基础，研究

平台，研究核心问题（解决了稳定性猜测的低微数情形），一步步发展成系统的理论。展现了大数学家的风采。我常用廖先生的研究历程鼓励自己的学生，要不怕孤独地做研究，力争做大研究，避免功利式的追求论文篇数。廖先生所说的微分动力系统的“统计式研究”，现在称为微分遍历论，也叫光滑遍历论。如今这个理论形成了一个相对成熟的学科，也在快速发展中。我在北京大学数学学院，从 2003 年开设这理论的研究生课程，差不多是 2 年讲授 1 个学期，不断纳入新发展的成果。凝练这些讲稿，挑选基本概念，基本定理，主要应用，内容基本自封，形成了研究生教材讲义《微分遍历论》，将于明年出版。书中有一章介绍廖先生的乘法遍历定理和格数理论。

廖先生的思路方法对我们的研究组或叫 group 有深刻影响，他的科研精神也鼓励了研究组的成长。group 有若干国外同行，主要成员则是我指导的硕士生博士生和博士后，如今他们已经成长为：复旦大学教授，重庆大学教授，中央财经大学教授，苏州大学副教授，中山大学副教授，美国 Michigan State University 副教授，美国 Virginia Tech. 的 Tenure-track，等。

在我们 group 解决的若干公开数学问题中，有 2 个是廖先生提出的公开问题，在我们的论文中提出了廖双曲，廖定性函数，Liao-Pesin 集合，廖格数，等术语。在国际微分动力系统领域，是一个有自身特色的 group。

廖先生从他发表的关于微分动力系统论文中挑选出 8 篇，形成了专著《微分动力系统的定性理论》。中文版 1992 年出版，英文版 1996

年。英文版比中文版多收录 2 篇论文，放在附录里面了。2001 年董镇喜，孙文祥，文兰编辑出版的《廖山涛论微分动力系统》也收集了几篇廖先生的论文。这 3 本书是廖先生留给动力系统研究者的宝贵财富。有志学习廖理论廖方法的人可学习这 3 本书和所列的参考文献，在参考文献中有廖先生的其它论文。廖先生论文中的思路方法工具，在当前的研究中仍然重要，发展这个理论也很重要。比如，Lyapunov 指数是状态点的可测函数，廖函数则是关于标架的连续函数，这连续性帮助我们研究组完成了 Lyapunov 指数的大偏差课题，即利用廖函数的连续性在标架丛系统做出估计再转移到原系统上。再举 1 例。廖先生 1979 年给出了单个轨道的封闭引理，2016 年我们 group 运用廖的结果在全测集合上形成了封闭引理，称为 Liao 封闭引理。这是研究 $C^{1+\text{DOM}}$ 非一致双曲系统的重要工具。而 $C^{1+\alpha}$ 情形的工具 1980 年由 Katok 给出。在 C^1 非一致双曲系统的空间中， $C^{1+\alpha}$ 的系统形成稠密集合，而 $C^{1+\text{dom}}$ 的系统形成剩余集合。剩余集合是比稠密集合 高级别大的一个集合。Liao 封闭引理和 Katok 封闭引理一起，成为研究 C^1 非一致双曲系统的重要工具，将促进这类系统的未来发展。

谢谢大家！